数理解析研究所講究録
392巻 1980年 42-52

Semi-positivity

東大 理　趙 康治

この§では次の定理を証明する.

定理　X, Y; complete non-singular projective varieties

$f: X \longrightarrow Y$; fiber space

で次の条件を満たすものとする.

(i)　$Y \supset Y_0$ Zariski-open set で $D \underset{\mathrm{def}}{=} Y - Y_0$ は正規交叉因子とする.

(ii)　$X_0 \underset{\mathrm{def}}{=} f^{-1}(Y_0)$　$f_0 \underset{\mathrm{def}}{=} f|_{X_0}$ とすると, $X - X_0$ は正規交叉因子で f_0 は smooth.

(iii)　$n = \dim X - \dim Y$ とする.

$R^n f_{0*}\mathbb{C}_{X_0}$ の D のまわりの local monodromy は unipotent.

このとき $f_* K_{X/Y}$ は locally free かつ semi-positive.

但し, $K_{X/Y} \underset{\mathrm{def}}{=} K_X \otimes (f^* K_Y)^{\otimes -1}$. K_X, K_Y はそれぞれ X, Y の canonical invertible sheaf.

Definition: complete normal algebraic variety X 上の locally free sheaf $\mathcal{F}$ が semi-positive であるとは、

(i) C 任意の非特異射影曲線

(ii) $\varphi: C \longrightarrow X$ 任意の morphism

(iii) $\varphi^*\mathcal{F}$ の任意の quotient invertible sheaf Q

に対して $\deg_C Q \geqq 0$ が成り立つこと。

最初に Variations of Hodge Structure の復習をする。

$\mathcal{H}_0 \underset{\text{def}}{=} (R^n f_{0*}\mathbb{C}_{X_0})_{prim} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}$, $\mathcal{F}_0 \underset{\text{def}}{=} f_{0*}K_{X_0/Y_0}$

'prim' は primitive part を表わす。

このとき $\mathcal{H}_0$ には Hodge filtration $\{F^p\}_{0 \leq p \leq n}$ が入り, $\mathcal{F}_0 = F^n(\mathcal{H}_0)$ となる。

さて $\mathcal{H}_0$ は次のようにして標準的に Y 上のある locally free sheaf $\mathcal{H}$ に拡張出来る:

$p \in D$, p での small open neighborhood $\mathcal{U}$ を充分小さくとって $\mathcal{U} \cong \Delta^d$, $\mathcal{U} \cap Y_0 \cong \Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$ とする。ここで $d = \dim Y$, Δ は disc. $\Delta^* = \Delta - \{0\}$

p のまわりの local coordinates を $(t_1, \cdots, t_d)$

D の local equation を $t_1 \cdots t_e = 0$ とする。

Hを上半平面とすると$H^e \times \Delta^{d-e}$は$\Delta^{*e} \times \Delta^{d-e}$の universal covering で、covering map πは次の様になる.

$$\pi : \begin{array}{ccc} H^e \times \Delta^{d-e} & \longrightarrow & \Delta^{*e} \times \Delta^{d-e} \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ (z_1, \cdots, z_e, t_{e+1}, \cdots, t_d) & \longmapsto & (\exp 2\pi i z_1, \cdots, \exp z_e, t_1, \cdots, t_d) \end{array}$$

このとき$\pi^* \mathcal{H}_0$は trivial. 以下 line bundle と invertible sheaf を同一視する. $\pi^* \mathcal{H}_0$の fiber を$H_{\mathbb{C}}$とすると,

$\mathcal{H}_0$は$H_{\mathbb{C}} \times H^e \times \Delta^{e-d}/\sim$と同一視出来る.

但し. $(v, z, t) \sim (v', z', t')$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} v = \gamma_i v' & \\ z_j = z_j' & (j \neq i) \\ z_i = z_i' + 1 & \\ t = t' & \end{array}$$

$\gamma_i \in \pi_1(\Delta^{*e} \times \Delta^{d-e})$は$t_i = 0$のまわりの local monodromy.

v: $H_{\mathbb{C}}$-valued hol. function

従って $s \in \mathcal{H}_0(\mathcal{U} \cap Y_0)$ は $v(z_1, \cdots z_{i-1}, z_i + 1, z_{i+1}, \cdots, z_e, t) = \gamma_i v(z_1, \cdots, z_e, t)$をみたすある$H_{\mathbb{C}}$-valued holomorphic function と1対1に対応する.

さて $v^*(z, t) \underset{def}{=} \exp(-\sum_{i=1}^{e} z_i N_i) v(z, t)$

$N_i = \log \gamma_i \quad (i = 1, \cdots e)$ とすると

$v^*(z_1, \cdots, z_{i-1}, z_i + 1, z_{i+1}, \cdots, z_e, t) = v^*(z, t)$

よってv^*は $\mathcal{U} \cap Y_0$上の holomorphic $H_{\mathbb{C}}$-valued function と見なせる.

故に $\mathcal{H}_0 \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U} \cap Y_0} \otimes H_{\mathbb{C}}$

この isomorphism によって $\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{U}$ 上に延長出来る．
即ち，$s \in \mathcal{H}_0(\mathcal{U} \cap Y_0)$

$$s = \sum_{i=1}^{m} f_i s_i \qquad f_i : \text{multi-valued holomorphic function}$$
$$s_i : \text{multi-valued flat section}$$

とすると，$s = \sum_{i=1}^{m} f_i \exp(\sum_{j=1}^{e} z_j N_j) \exp(-\sum_{j=1}^{e} z_j N_j) s_i$ が成り立つから，s が $\mathcal{U}$ 上にのびる $\Leftrightarrow$ f_i は D に沿って高々 logarithmic singularity をもつ．
また Nilpotent Orbit Theorem によって $\{F^p\}$ も $\mathcal{U}$ 上に拡張出来る．拡張した filtration も同じく $\{F^p\}$ とかく．$\mathcal{F} \underset{def}{=} F^n(\mathcal{H})$　$\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}_0 = f_{0*} K_{X_0/Y_0}$ の延長である．

主張：$\mathcal{F} = f_* K_{X/Y}$

$s = \sum f_i s_i$（f_i, s_i は前と同じもの．）

を D に沿う $\mathcal{F}_0$ の rational section とする．

$$\int_{X_t} s \wedge \bar{s} = \sum a_{ij} f_i \bar{f}_j$$

$a_{ij} \underset{def}{=} \int_{X_t} s_i \wedge \bar{s}_j$　ここで s_i 達は flat，で X_t は C^∞－多様体として t によらず同型であるから a_{ij} は定数．

$s \in \Gamma(\mathcal{U} \cap Y_0, f_{0*}K_{X_0/Y_0})$

$= \Gamma(f_0^{-1}(\mathcal{U} \cap Y_0), \mathcal{H}om(f_0^* K_{Y_0}, K_{X_0}))$

$f_0^*(dt) \in \Gamma(f_0^{-1}(\mathcal{U} \cap Y_0), f_0^* K_{Y_0}) \qquad dt = dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d$

$f_0^*(dt)$は明らかに$f^*(dt) \in \Gamma(f^{-1}(\mathcal{U}), f^*K_Y)$にのびる。

$s(f_0^* dt) \in \Gamma(f_0^{-1}(\mathcal{U} \cap Y_0), K_{X_0})$

従って sが $\Gamma(\mathcal{U}, f_* K_{X/Y})$の元にのびる。

$\Longleftrightarrow$ $s(f_0^* dt)$が $\Gamma(f^{-1}(\mathcal{U}), K_X)$の元にのびる。

$$\Longleftrightarrow \left| \int_{f^{-1}(\mathcal{U} \cap Y_0)} s(f_0^* dt) \wedge \overline{s(f_0^* dt)} \right| < \infty \quad (\text{Sakai})$$

$$\Longleftrightarrow \left| \int_{\mathcal{U} \cap Y_0} \int_{X_t} s \wedge \bar{s} \right| < \infty$$

$$\Longleftrightarrow \left| \sum a_{ij} \int_{X_t} f_i \bar{f}_j \, dt \wedge d\bar{t} \right| < \infty$$

$\Longleftrightarrow$ f_iは高々 logarithmic singularity を持つ。

$\Longleftrightarrow$ sが $\mathcal{F}$ の section に拡張出来る。

即ち， $\mathcal{F} = f_* K_{X/Y}$ q.e.d.

(2) D_1: D の irreducible component とする.

$D_1^\circ \underset{def}{=} D_1 - \overline{(D - D_1)}$

U: D_1 の small open nbd.

$U^\circ \underset{def}{=} U - \overline{(D - D_1)}$

γ_1: $\mathcal{H}|_{U-D}$ の D_1 のまわりの local monodromy.

このとき $\mathcal{H}|_{U-D}$ 上に ascending filtration $\{W_\ell\}_{0 \le \ell \le 2n}$ が存在して,

(i) $N(W_\ell) \subset W_{\ell-2}$ $\quad N = \log \gamma_1$

(ii) $N^\ell : Gr^W_{n+\ell}(\mathcal{H}|_{U-D}) \xrightarrow{\sim} Gr^W_{n-\ell}(\mathcal{H}|_{U-D})$ $\quad \ell \geq 0$

また $Gr^W(\mathcal{H}|_{U-D})$ 上で $\gamma_1 \equiv 1$ であるから $\{W_\ell\}$ は $\mathcal{H}|_{U^\circ}$ 上にのび, $Gr^W_r(\mathcal{H}|_{U^\circ})$ は もとの Gauss-Manin connection から誘導された flat connection を持つ.

$\{W_\ell\}$, $\{F^p\}$ は $\mathcal{H}|_{D_1^\circ}$ 上に variation of mixed Hodge structure を定める. 即ち $\{F^p\}$ は $Gr^W_r(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$ 上に variation of Hodge structure を定める. 但し polarization はない.

$P_\ell^\circ \underset{def}{=} \mathrm{Ker}\, N^{\ell-n+1}$ $\quad N^{\ell-n+1} : Gr^W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1^\circ}) \longrightarrow Gr^W_{2n-\ell-2}(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$

$(\ell \geq n)$ $\quad \ell < n$ のときは $P_\ell^\circ = 0$ とおくと.

P_ℓ° $(n \le \ell \le 2n)$ は polarization S_ℓ を持つ variation of Hodge structures となる. 但し, S_ℓ は次の様に定義される:

$y \in D_1^\circ$, $\tilde{u}, \tilde{v} \in P^\circ_{\ell, y}$ とする.

u, v を $W_\ell(\mathcal{H}|_{U-D})$ の multi-valued flat sections で, $\tilde{u}, \tilde{v}$ に行く $Gr^W_\ell(\mathcal{H}|_{U^\circ})$ の flat sections を誘導するものと仮定する.

$S_\ell(\tilde{u}, \tilde{v}) \underset{def}{=} S(u, N^{\ell-n} \bar{v})$ S は元々の polarization

P_ℓ° は前と同様な議論によって D_1 上の P_ℓ にのびる.

一方 $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1^\circ})$ も $\mathcal{H}|_{D_1}$ の locally free subsheaves $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1})$ にのびる.

このとき $Gr^W_\ell(\mathcal{F}|_{D_1^\circ}) = F^n(P_\ell^\circ)$

∵) $\supset$ は明らか. $\subset$ を示す.

$$x \in F^n \cap W_\ell. \quad N^{\ell-n+1} x \in F^{2n-\ell-1} \cap W_{2n-\ell-2}$$
$$= F^{2n-\ell-1} \cap W_{2n-\ell-2}.$$

$$\left(\because) \quad F^{2n-\ell-1} Gr^W_{2n-\ell-2} = 0 \right)$$

■

さて $\deg_C Q \geq 0$ を証明する.

(i) $\varphi(C) \cap Y_0 \neq \phi$ とする.

$h(u, v) \underset{def}{=} S(u, \bar{v})$ $u, v \in \mathcal{F}_{0,y}$ $y \in Y_0$ によって $\mathcal{F}_0$ 上に positive definite hermitian metric を定義する. S は $\mathcal{H}_0$ の polarization.

$C_0 \underset{\mathrm{def}}{=} \varphi^{-1}(Y_0)$.

$Q|C_0$ には hから誘導された hermitian metric h_Q が入る。Griffith により、Θ は positive semi-definite 従って Θ_Q も positive semi-definite になる。

但し、Θ は h に associate した metric curvature

Θ_Q h_Qに associate した metric curvature

一方、Schmid により $h(v_p, v_p)$ は $O(|t|^{-2\alpha'_p}|\log t|^{\beta'_p})$

v_p : $\mathcal{H}_0$の uniformizing section , $p \in D$

$\alpha'_p \geq 0$, $\beta'_p \geq 0$ となることがわかるから、

$h_Q(v_q, v_q) = O(|t|^{-2\alpha_q}|\log t|^{\beta_q})$

v_q : Q の uniformizing section $q \in C - C_0$

t は q での local coordinate

$\alpha_q \geq 0$, $\beta_q \geq 0$ となる。

従って次の lemma から $\deg_C Q \geq 0$ となる。

Lemma : L : 非特異射影曲線C上の invertible sheaf

$C \supset C_0$ Zariski-open set.

h : hermitian metric on $L|C_0$

$\Theta = \bar\partial\partial \log h$ metric connection

$p \in C - C_0$.

t_p : p での local coordinate

pの近くの uniformizing section を v_p とする。
このとき $h(v_p, v_p) = O(|t|^{-2\alpha_p}|\log t|^{\beta_p})$ が成り立つならば $(\alpha_p \geqq 0,\ \beta_p \geqq 0)$

$$\deg_C L = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{C_0} \Theta + \sum_{p \in C - C_0} \alpha_p$$

∵) $U_p = \{x : |t_p(x)| < \varepsilon\}$　$p \in C - C_0$

h を U_p 内だけで変形して L 上の C^∞ metric h' をつくる。$\Theta' = \bar\partial\partial \log h'$

$$\deg_C L = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_C \Theta' = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{C - \bigcup_p U_p} \Theta + \sum_{p \in C - C_0} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{U_p} \Theta'$$

Stokes の定理によって

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{U_p} \Theta' = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{\partial U_p} \partial \log h(v_p, v_p) \quad \begin{pmatrix} ∵)\ h = h' \\ \text{on } \partial U_p \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h}{\partial \log r}\, d\theta \qquad t_p = r e^{2\pi i\theta}$$

また $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h}{\partial \log r}\, d\theta = -2\alpha_p$

これから上の公式が出る。 ■

(ii) $\varphi(C) \subset D_1$, $\varphi(C) \cap D_1^\circ = \phi$ の場合.

$$\varphi^* \mathcal{F} \xrightarrow[g]{} Q \longrightarrow 0$$

ま l $\varphi^* W_{l-1}(\mathcal{F}) \subset \operatorname{Ker} g$, $\varphi^* W_l(\mathcal{F}) \not\subset \operatorname{Ker} g$

となるから, $\varphi^* Gr_l^W(\mathcal{F}|_{D_1}) \longrightarrow Q$ なる non-zero homomorphism が誘導される. Q' をこの homomorphism の像とする. (i)の議論において $\mathcal{F} = F^n(\mathcal{H})$ のかわりに $Gr_l^W(\mathcal{F}|_{D_1}) = F^n(\mathcal{P}_l) \subset \mathcal{P}_l$ を使えば, $\deg_C Q' \geqq 0$ が証明出来る. 故に $\deg_C Q \geqq \deg_C Q' \geqq 0$

(iii) D_2 : Dの他の irreducible component.

$$D_{12} = D_1 \cap D_2$$

$$D_{12}^\circ = D_{12} - \overline{(D - D_1 - D_2)}$$

$\varphi(C) \subset D_{12}$, $\varphi(C) \cap D_{12}^\circ \neq \phi$ の場合も

(ii)と同様に証明出来る.

以下, $\varphi(C)$ と D の包含関係によって帰納的に証明出来る.

参考文献:

Fujita: On Kaehler fiber spaces over curves
J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 779–794

Griffiths: Periods of integrals on algebraic manifolds III, Publ. Math. IHES, 38 (1970) 125–180

Sakai: Kodaira dimensions of complements of divisors, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 1977, Iwanami, 239–257

Schmid; Variation of Hodge structure; the singularities of period mapping
Inv. Math. 22 (1973), 211–319